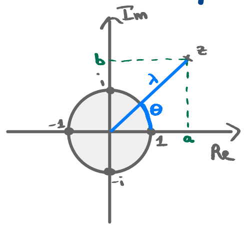
Série 1

▹ Nombres complexes



$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$ (parties réelle & imaginaire)

$\quad = \lambda e^{i\theta} \qquad \lambda, \theta \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0,\ \theta \in [-\pi, \pi[$ (norme & phase)

$\hookrightarrow \begin{cases} a = \lambda \cos\theta \\ b = \lambda \sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \ (+\pi \text{ si } a<0) \end{cases}$

$\sqrt{z} = \sqrt{\lambda}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

▹ Valeurs & vecteurs propres

"Une matrice M a un vecteur propre $\vec{v}$ associé à une valeur propre λ" $\iff$ $\boxed{M\vec{v} = \lambda\vec{v}}$ (et $\vec{v} \neq \vec{0}$) $\iff (M - \lambda \mathbb{1})\vec{v} = 0$

♡ Définition

$\hookrightarrow$ on peut trouver un $\vec{v} \neq \vec{0}$ si $\boxed{\det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0}$

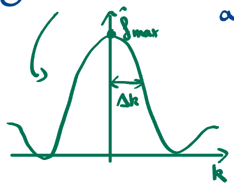
$\hookrightarrow$ Pour trouver les λ

$\hookrightarrow$ À une valeur propre λ est associé une infinité de vecteurs propres, car si $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, alors $M(c\vec{v}) = \lambda(c\vec{v})$! Pour trouver un vecteur propre, poser une convention (ex : $\|\vec{v}\| = 1$, $v_1 = 1$, ...)

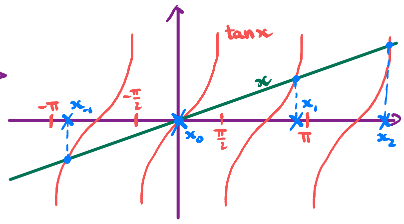
▹ Discuter une fonction

- → Extrema : x tq $f'(x) = 0$.
- → Zeros : " " $f(x) = 0$
- → Largeur spectrale : Δk tq $\hat{f}(k_0 + \Delta k) = \frac{\hat{f}_{max}}{2}$ avec $\hat{f}(k_0) = \hat{f}_{max}$

Déterminer x explicitement si possible. Sinon, donner une expression implicite la plus simplifiée possible, et potentiellement étudier les solutions graphiquement



ex : "étudier les x_n tq $\tan(x_n) = x_n$" →



▹ Analyse dimensionnelle

- → Toujours vérifier la bonne dimension de ses résultats. C'est une méthode très simple pour détecter une erreur.
- → Pour retrouver la dimension d'une constante universelle, retrouver une expression où elle apparaît avec des grandeurs simples.

ex : $[g]$? $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

$[\hbar]$? $\varphi(t) = \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$

⚠ L'argument d'une fonction trigonométrique (exp, cos ...) est toujours adimensionnelle !

(Si vous avez dans un énoncé $\sin(t)$, c'est que t est un temps qui a été normalisé par une durée caractéristique, ou qu'on a en fait $\sin(\omega t)$ avec $\omega = 1$ implicite)

▹ Grandeurs conjuguées

Les variables conjuguées sont des paires de quantités physiques qui sont réciproquement liées
$\hookrightarrow$ la valeur de l'une fait varier l'autre

ex : position $x \leftrightarrow$ impulsion p
temps $t \leftrightarrow$ énergie E

Et en mécanique quantique ?

Ces paires sont soumises à l'inégalité de Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$)

La dualité onde-particule donne $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ & $E = \hbar\omega$

→ constante de Planck réduite, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

vecteur d'onde, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

pulsation, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier permet d'aller d'une variable conjuguée à l'autre ! Pour un bon sens physique choisir des notations adaptées.

$g(x) \leftrightarrow \hat{g}(k) \qquad f(t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega)$ ou $\hat{f}(\nu)$